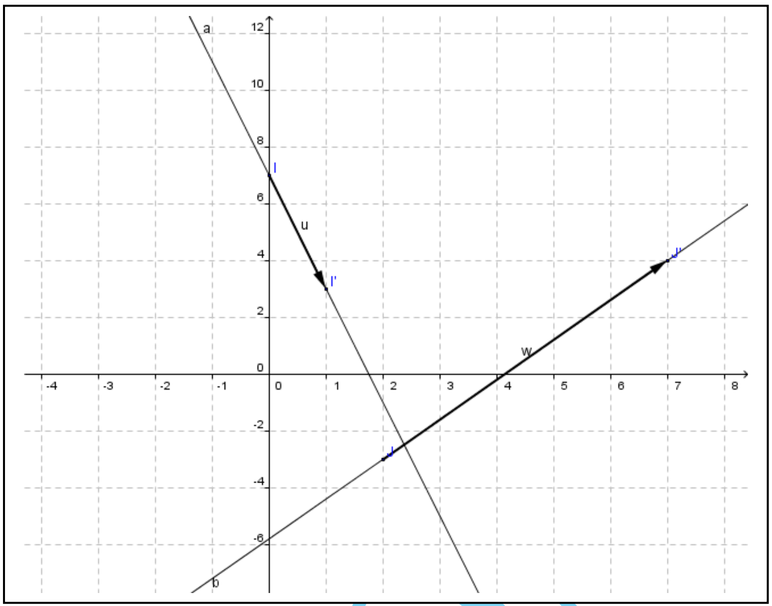
1. Fonction affine

-Exercice 1-

1. La droite ($\mathcal{D}$) passant par I(0, 7) de coefficient directeur –4 admet pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;-4)$; on construit le représentant de ce vecteur d'origine I et on obtient un deuxième point de la droite I'(1 ; 3) d'où le tracé.



La droite ($\mathcal{D}$') passant par J(2, -3) de coefficient directeur $\frac{7}{5}$ admet pour vecteur directeur $\vec{v}(1\,;\frac{7}{5})$ ou encore le vecteur $\vec{w} = 5\vec{v}(5\,;7)$ colinéaire au précédent; d'où la construction analogue à la précédente.

2. (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et possède donc une équation de la forme $y = mx + p$.
p est l'ordonnée à l'origine ou ordonnée du point d'abscisse 0 de la droite, ici A(0 ;- 3) ; donc p = -3.

m est le coefficient directeur défini par $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; ici on obtient : m = 2.

En conclusion, (AB) a pour équation : $y = 2\,x - 3$.

(CD) non parallèle à (Oy), a une équation de la forme $y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = -\dfrac{3}{5}$ mais p ne peut être lu graphiquement avec précision. On sait que (CD) a pour équation $y = -\dfrac{3}{5}x + p$ et on sait que (CD) passe par C et D. En utilisant par exemple D(4 ; 1) : $y_D = -\dfrac{3}{5}x_D + p \iff 1 = -\dfrac{3}{5}\times 4 + p$ d'où $p = \dfrac{17}{5}$.

En conclusion, (CD) a pour équation : $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{17}{5}$.

2. Fonction polynôme de degré 2

-Exercice 2-

a) $-3x^2 + 2x + 2 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 28$ donc les solutions sont : $x' = \dfrac{-2-\sqrt{28}}{-6} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$ et $x'' = \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$.

b) $x^4 - x^2 - 6 > 0$ est une étude bicarrée qu'on résout en posant $\boldsymbol{X = x^2}$. On obtient alors $X^2 - X - 6 > 0$.

1ère méthode : Les racines de $X^2 - X - 6$ sont -2 et 3 d'où la factorisation $X^2 - X - 6 = (X + 2)(X - 3)$ et ainsi $x^4 - x^2 - 6 = (x^2 + 2)(x^2 - 3)$. On obtient : $x^4 - x^2 - 6 > 0 \iff (x^2 + 2)(x^2 - 3) > 0$

Or, pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 2 \geq 2 > 0$ d'où $x^4 - x^2 - 6 > 0 \iff x^2 - 3 > 0 \iff x^2 > 3 \iff$ $x < -\sqrt{3}$ ou $x > \sqrt{3}$ d'où l'ensemble des solutions est : S = $]-\infty\,;-\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3}\,;+\infty[$

2ième méthode : Les racines de $X^2 - X - 6$ sont -2 et 3 d'où le tableau de signe :

X	$-\infty$ -2 3 $+\infty$
$X^2 - X - 6$	+ 0 – 0 +

On a alors $X^2 - X - 6 > 0 \iff X < -2$ ou $X > 3$
$\iff x^2 < -2$ ou $x^2 > 3$

Or $x^2 < -2$ est impossible (car un carré est toujours positif ou nul) ; il reste donc $x^2 > 3$ et on retrouve, comme à la 1ière méthode S = $]-\infty\,;-\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3}\,;+\infty[$

c) $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{3}{x} \leq 2$ est possible à condition que $x \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$ soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;-2\}$

$\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{3}{x} \leq 2 \iff \dfrac{x - 3(x+2) - 2x(x+2)}{x(x+2)} \leq 0$ après transposition de tous les termes et réduction au même dénominateur.

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x} \le 2 \Leftrightarrow \frac{-2x^2-6x-6}{(x+2)x} \le 0$$

cette inéquation nécessite un tableau de signe.

$-2x^2 - 6x - 6$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 48 = -12$ donc le trinôme est toujours du signe du coefficient de x^2 c'est-à-dire toujours négatif.

Les racines de $x(x + 2)$ sont 0 et –2 d'où :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-2x^2 - 6x - 6$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$(x+2)\,x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{-2x^2-6x-6}{(x+2)x}$		$-$	||	$+$	||	$-$	

On obtient : $S = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$

-<u>Exercice 3</u>-

a) La parabole a « les bras en bas » ou « le sommet en haut » donc $a < 0$ et comme $|a| = 0{,}5$, on en déduit $a = -0{,}5$. La parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses –1 et 3 donc les racines du trinôme sont –1 et 3 et sa forme factorisée est donc : $f(x) = -0{,}5(x + 1)(x - 3)$.

Pour trouver les coordonnées du sommet, on cherche la forme canonique du trinôme :

$f(x) = -0{,}5(x^2 - 2x - 3) = -0{,}5[(x - 1)^2 - 1 - 3] = -0{,}5(x - 1)^2 + 2$. Les coordonnées du sommet sont donc S(1 ; 2).

b) $f(x) = -3(x + 1)(x - 2)$: les racines sont donc –1 et 2.

$a = -3$ donc $a < 0$: la parabole a « les bras en bas » : f est croissante puis décroissante (il reste à déterminer sur quels intervalles). $f(x) = -3(x^2 - x - 2) = -3[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2] = -3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{27}{4}$: le sommet de la parabole a pour coordonnées : $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{27}{4}\right)$

d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Ou $f(x) = -3(x^2 - x - 2)$, fonction polynôme dérivable sur ℝ avec $f'(x) = -3(2x - 1)$, fonction affine ayant pour racine $\frac{1}{2}$ d'où les variations de f :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{27}{4}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

c) La parabole a « le sommet en bas » donc $a > 0$ et comme $|a| = \frac{1}{3}$, on en déduit $a = \frac{1}{3}$.

S a pour coordonnées (3 ; 2) donc la forme canonique est $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 2$

L'image de 0 est $f(0) = \frac{1}{3}(-3)^2 + 2 = 5$

d) La parabole a « les bras en bas » donc $a < 0$ et comme $|a| = 2$, on en déduit $a = -2$. La parabole coupe l'axe des abscisses au seul point de coordonnées (-2 ; 0) qui est donc son sommet : la forme canonique (qui est aussi la forme factorisée) est $f(x) = -2(x + 2)^2$.

Pour trouver les antécédents de –1, on résout : $f(x) = -1$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow -2(x+2)^2 = -1 \Leftrightarrow (x+2)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x + 2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ou } f(x) = -1 \Leftrightarrow 1 - 2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[1 - \sqrt{2}(x+2)\right]\left[1 + \sqrt{2}(x+2)\right] = 0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 1 - \sqrt{2}(x+2) = 0 \quad \text{ou} \\ 1 + \sqrt{2}(x+2) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2 \quad \text{ou} \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2 \end{array}\right.$$