3. Notion de suite

Exercice 4 :

1) a) $u_5 = \frac{3}{5+5} = \frac{3}{10}$

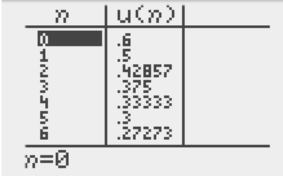
$u_{11} = \frac{3}{11+5} = \frac{3}{16}$

b) Le 1er terme est le terme d'indice 0 : $u_0 = \frac{3}{5}$

Le 3e terme est le terme d'indice 2 : $u_2 = \frac{3}{7}$

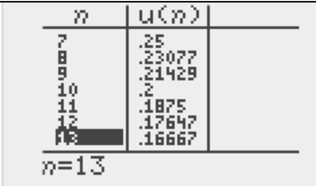
Les 4 premiers termes sont : $u_0 = \frac{3}{5}$; $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{3}{7}$ et $u_3 = \frac{3}{8}$

c) L'indice *n* varie de 0 à 19



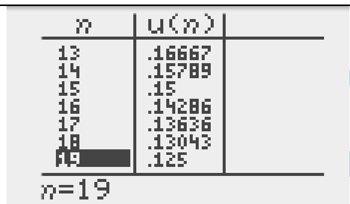
n	u(n)
0	.6
1	.5
2	.42857
3	.375
4	.33333
5	.3
6	.27273

n=0



n	u(n)
7	.25
8	.23077
9	.21429
10	.2
11	.1875
12	.17647
13	.16667

n=13



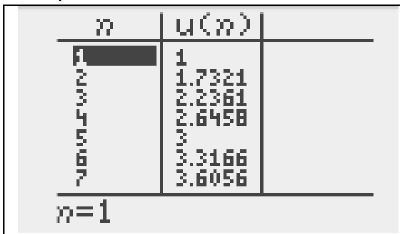
n	u(n)
13	.16667
14	.15789
15	.15
16	.14286
17	.13636
18	.13043
19	.125

n=19

2) a) $v_1 = \sqrt{2 \times 1 - 1} = \sqrt{1} = 1$

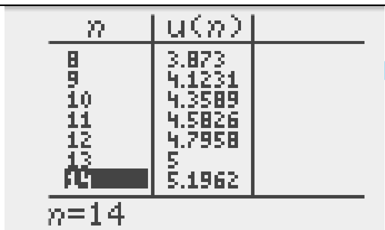
b) Les 4 premiers termes sont : $v_1 = 1$; $v_2 = \sqrt{3}$; $v_3 = \sqrt{5}$; $v_4 = \sqrt{7}$

c) L'indice *n* varie de 1 à 20



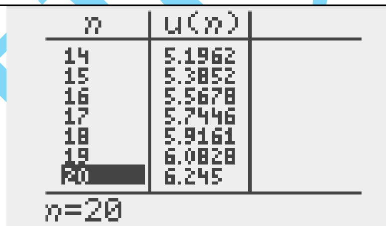
n	u(n)
1	1
2	1.7321
3	2.2361
4	2.6458
5	3
6	3.3166
7	3.6056

n=1



n	u(n)
8	3.873
9	4.1231
10	4.3589
11	4.5826
12	4.7958
13	5
14	5.1962

n=14



n	u(n)
14	5.1962
15	5.3852
16	5.5678
17	5.7446
18	5.9161
19	6.0828
20	6.245

n=20

4. Suite définie de façon explicite

Exercice 5 :

1) Les 4 premiers termes sont : $u_0 = 0$; $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{4}{4} = 1$ et $u_3 = \frac{9}{8}$

2) $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$

3) a) Pour tout entier naturel *n*,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{2n^2}{2 \times 2^n} = \frac{(n+1)^2 - 2n^2}{2^{n+1}} = \frac{(n^2+2n+1) - 2n^2}{2^{n+1}} = \frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$$

b) Considérons le trinôme du second degré $-x^2 + 2x + 1$

$\Delta = 8 > 0$, $il, admet\ donc\ 2\ racines\ réelles\ x_1 = 1 - \sqrt{2}$ $et\ x_2 = 1 + \sqrt{2}$

$a = -1 < 0$

Donc le signe est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2x+1$		-	0	+	0	-	

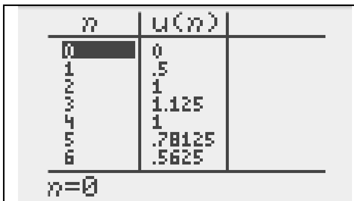
$1 + \sqrt{2} < 3$ donc pour tout réel $x \geq 3$ $-x^2 + 2x + 1 < 0$ ainsi en se limitant aux entiers supérieurs à 3

Pour tout entier naturel $n \geq 3$ $-n^2 + 2n + 1 < 0$

4) Pour tout entier naturel <u>n</u> , $2^{n+1} > 0$. Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le même que le signe de $-n^2 + 2n + 1$

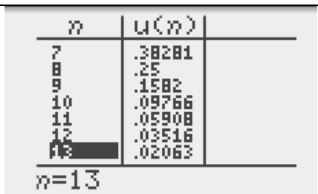
Pour tout entier naturel $n \geq 3$ $-n^2 + 2n + 1 < 0$ donc

Pour tout entier naturel $n \geq 3$ $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite est décroissante à partir de l'indice 3



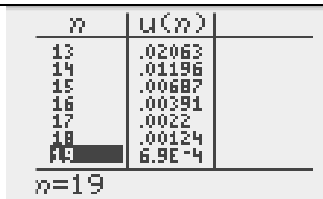
n	u(n)
0	0
1	.5
2	1
3	1.125
4	1
5	.78125
6	.5625

n=0



n	u(n)
7	.38281
8	.25
9	.1582
10	.09766
11	.05908
12	.03516
13	.02063

n=13



n	u(n)
13	.02063
14	.01196
15	.00687
16	.00391
17	.0022
18	.00124
19	6.9E-4

n=19

L’observation à partir de l’indice 3 est conforme à notre affirmation

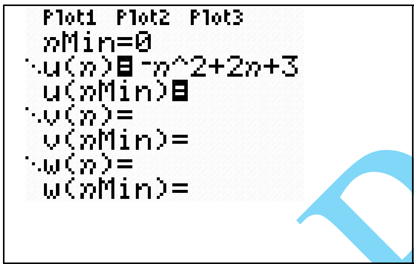
5) On observe que pour les indices inférieurs ou égaux à 10, $0 \leq u_n \leq 1{,}5$
Pour obtenir l’écran demandé :
$n_{Min} = 0$
$n_{Max} = 11$
$X_{Min} = -1$
$X_{Max} = 11$
$Y_{Min} = -1$
$Y_{max} = 1{,}5$

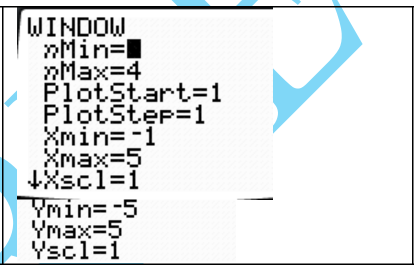
6)
- La première graduation sur l’axe (oy) représente 1
- La première graduation sur l’axe (ox) représente 1
- La suite n’est pas décroissante car $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$
- La suite est bornée.

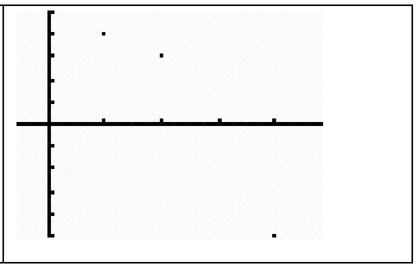
- En effet pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n^2}{2^n} > 0$
- La question 4) prouve que la suite est décroissante à partir de l’indice 3, donc

Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a $u_n \leq u_3$ et $u_3 < 1{,}5$ donc $u_n \leq 1{,}5$ pour $n \geq 3$
De plus le calcul montre que $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < 1{,}5$
Ainsi pour tout entier naturel *n* $u_n \leq 1{,}5$
En résumé : pour tout entier naturel *n*, $0 \leq u_n \leq 1{,}5$ et la suite est bornée

Exercice 6 :
1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
2) La suite est représentée par un nuage de points $A_n(n;u_n)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = f(n)$
$u_0 = f(0) = 3$ *est l'ordonnée du point A*, $u_1 = f(1) = 4$ *est l'ordonnée du point B*,
$u_2 = f(2) = 3$ *est l'ordonnée du point C*, $u_3 = f(3) = 0$ *est l'ordonnée du point D*
et $u_4 = f(4) = -5$ *est l'ordonée du point E*



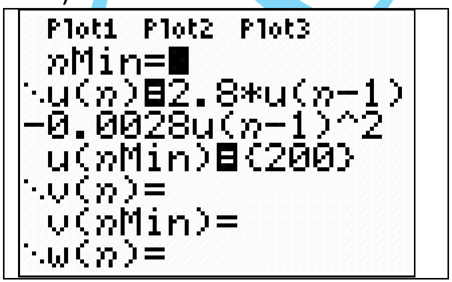




5. Suite définie par une relation de récurrence

Exercice 7 :

1. a)



n	$u(n)$
0	200
1	448
2	692.43
3	596.32
4	674.02
5	615.2
6	662.84

n=0

n	$u(n)$
7	625.75
8	655.72
9	632.1
10	651.14
11	636.04
12	648.18
13	638.52

n=13

n	$u(n)$
15	640.09
16	645.05
17	641.09
18	644.26
19	641.73
20	643.76
21	642.14

n=20

n	$u(n)$
19	641.73
20	643.76
21	642.14
22	643.43
23	642.4
24	643.23
25	642.56

n=25

b)

n	$u(n)$
42	642.86
43	642.85
44	642.86
45	642.85
46	642.86
47	642.85
48	642.86

n=48

n	$u(n)$
54	642.86
55	642.86
56	642.86
57	642.86
58	642.86
59	642.86
60	642.86

n=60

n	$u(n)$
96	642.86
97	642.86
98	642.86
99	642.86
100	642.86
101	642.86
102	642.86

n=102

La valeur des termes de la suite semble se stabiliser vers le nombre 642,86
Après un grand nombre d'année, la population semble se stabiliser vers 642 individus

2. a) La courbe C_f est la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré, c'est donc la parabole d'équation $y = -0{,}0028x^2 + 2{,}8x$

L'équation est du type $y = ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = -0{,}0028 \\ b = 2{,}8 \\ c = 0 \end{cases}$ donc le sommet a pour abscisse $-\frac{b}{2a} = 500$ et son ordonnée est $f(500) = 700$ donc en résumé le sommet est le point $\Omega(500; 700)$

b) L'axe des abscisses est la droite (Ox) d'équation $y = 0$

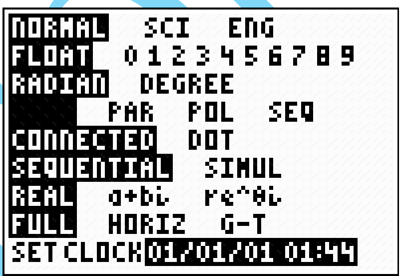
$$M(x; y) \in C_f \cap (ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -0{,}0028x^2 + 2{,}8x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}0028x^2 + 2{,}8x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-0{,}0028x + 2{,}8) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } -0{,}0028x + 2{,}8 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

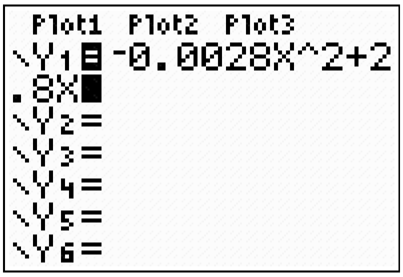
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \frac{2{,}8}{0{,}0028} = \frac{28\times10^{-1}}{28\times10^{-4}} = 10^3 = 1000 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = 0 \\ \text{ou} \\ x = 100 \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

Donc il existe 2 points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses : $O(0; 0)$ et $A(1000; 0)$

c) Retour au mode fonction

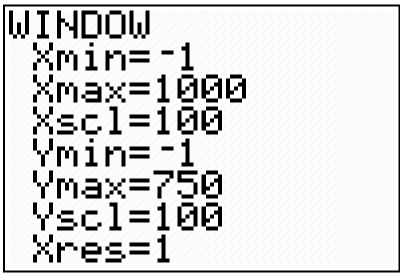


Définir la fonction

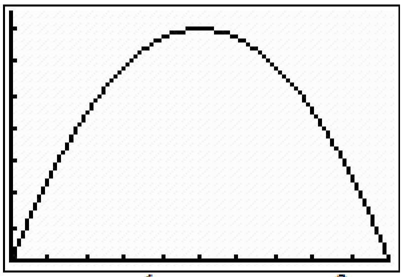


Attention au signe – devant 0.0028

Définir la fenêtre



Tracer la courbe



3. $M(x;y) \in C_f \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y = -0{,}0028x^2 + 2{,}8x \\ y = x \end{cases}$

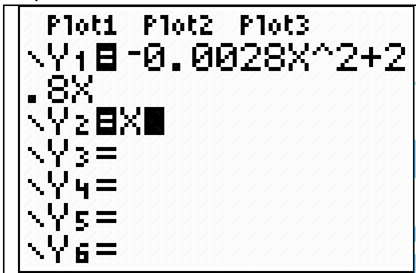
$\Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}0028x^2 + 2{,}8x = x \\ y = x \end{cases}$ $\qquad \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}0028x^2 + 1{,}8x = 0 \\ y = x \end{cases}$

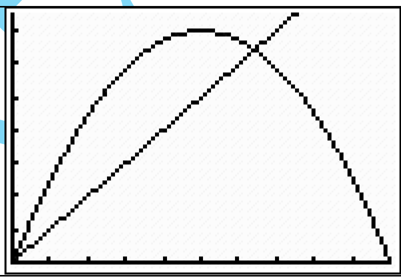
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \ ou \ \ -0{,}0028x + 1{,}8 = 0 \\ y = x \end{cases}$ $\qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ ou \ x = \frac{1{,}8}{0.0028} = \frac{4500}{7} \\ y = x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ et \ y = 0 \\ ou \\ x = \dfrac{4500}{7} \ et \ y = \dfrac{4500}{7} \end{cases}$

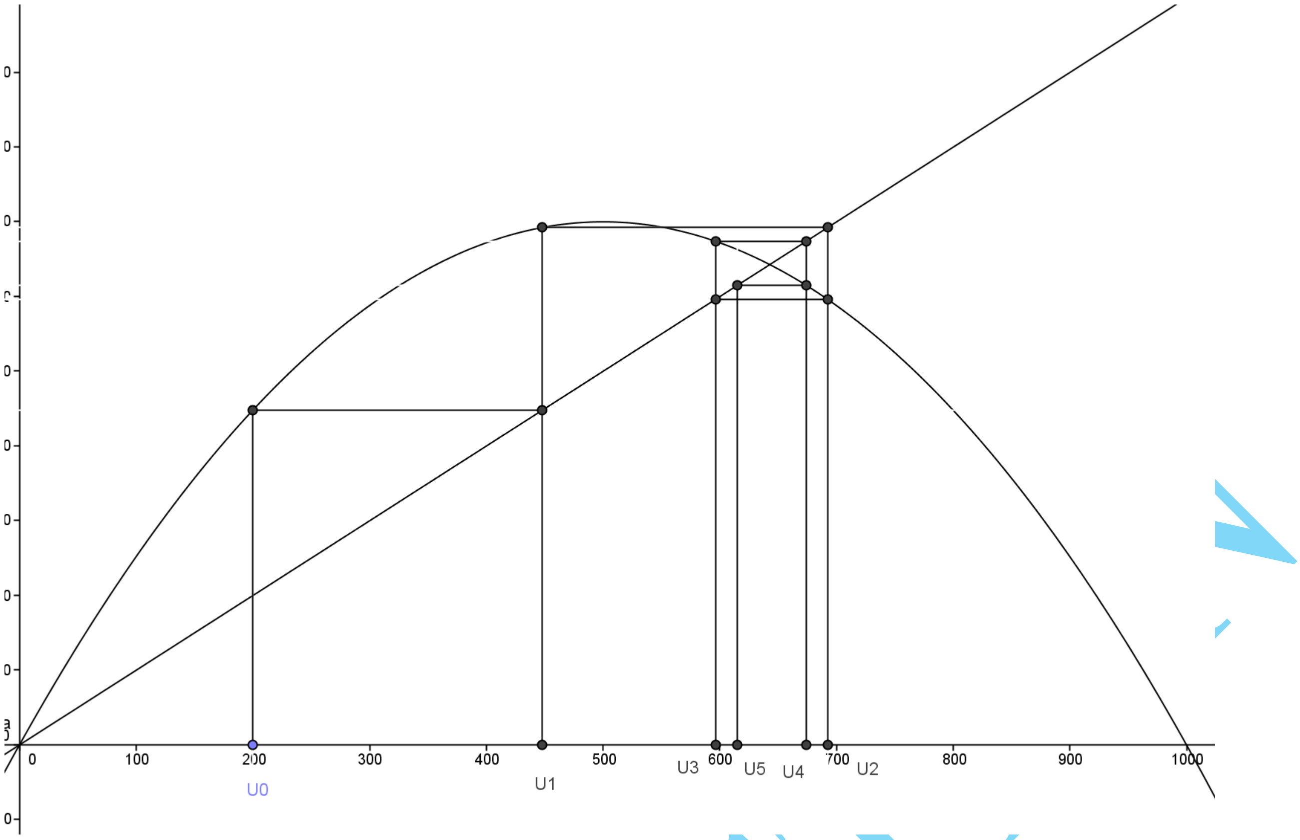
Donc il existe 2 points d'intersection de C_f et de la droite Δ : $O(0;0)$ et $B(\frac{4500}{7};\frac{4500}{7})$

b)

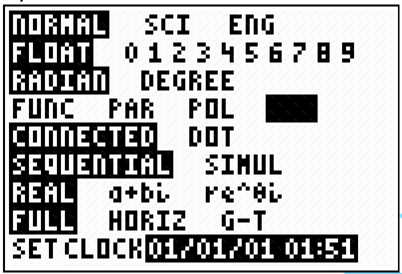




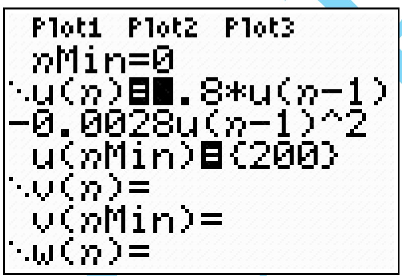
c)



d) Mode suite

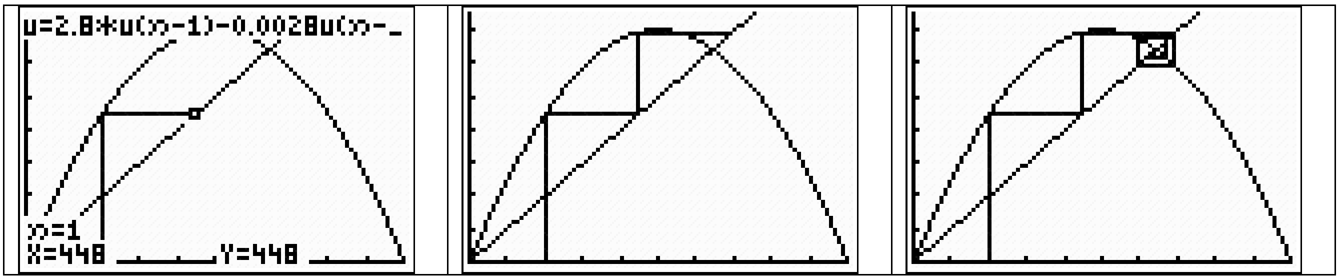


Définir la suite



Paramétrer le FORMAT

Activer la fonction TRACE et tracer pas à pas avec la touche « déplacement droit »



Les termes de la suite se s'accumule vers l'abscisse du point d'intersection de C_f et de la droite Δ, c'est-à-dire $\frac{4500}{7} \approx 642{,}857$

Ce qui confirme les résultats du 1.