## 6. Sens de variation d 'une suite

-Exercice 8-

1. Posons $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ avec $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ ; on a donc $u_n = f(n)$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2-(x+1)^2}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$ ; or, pour tout $x$ de $\left]0\,;+\infty\right[$, $-2x-1<0$ et $x^2>0$ et $(x+1)^2>0$ donc $f'(x)<0$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$ . $f$ est strictement décroissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et la suite $(u_n)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

2. Formons et étudions $u_{n+1} - u_n$ .

Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = -2n + 10$ et $-2n+10 \leq 0$ si $n \geq 5$ ; la suite $(u_n)$ est décroissante à partir du terme d'indice 5.

3. Formons et étudions $u_{n+1} - u_n$ .

Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 - 2u_n - 1 = -(u_n+1)^2$ ; cette expression est négative ou nulle pour toute valeur de $u_n$. La suite $(u_n)$ est donc décroissante sur $\mathbb{N}$.

4. Formons et étudions $u_{n+1} - u_n$ .

Pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{(n+1)^2+(n+1)+2} - \sqrt{n^2+n+2} = \sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2+n+2} = \dfrac{\sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2+n+2}}{1}$ .

Multiplions numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2+n+2}$ , on obtient :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2+n+2}\right)\left(\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2+n+2}\right)}{\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2+n+2}} = \frac{2n+2}{\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2+n+2}}$$

. Cette expression, quotient de deux expressions strictement positive sur $\mathbb{N}$, est strictement positive sur $\mathbb{N}$ et la suite $(u_n)$ est donc strictement **croissante** sur $\mathbb{N}$.

5. Posons $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 3$ avec $x \in \left[0\,;+\infty\right[$ ; on a donc $u_n = f(n)$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2-4x-5)$ ; cette expression est négative sur $[-1\,;5]$ et positive sur $\left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[5\,;+\infty\right[$.

La fonction $f$ est croissante sur $\left[5\,;+\infty\right[$ et la suite $(u_n)$ est donc croissante à partir du terme d'indice 5.

6. La méthode la plus appropriée est l'étude de signe de l'expression $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\dfrac{2^n}{n^2+1}} - 1 = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1} \times \frac{n^2+1}{2^n} - 1 = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} - 1 = \frac{2(n^2+1)}{n^2+2n+2} - 1 = \frac{n^2-2n}{n^2+2n+2} = \frac{(n-2)n}{n^2+2n+2}$$

Pour tout entier $n$, $n \geq 0$ et $n^2+2n+2>0$ ; l'expression $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ a donc le signe de $n-2$, elle est donc positive ou nulle pour $n \geq 2$.

Par ailleurs, la suite $(u_n)$ est strictement positive car $2^n$ et $n^2+1$ le sont aussi.

Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geq 0$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ; par conséquent $\left.\begin{array}{l} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \\ u_n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$ ( pour $n \geq 2$)

La suite $(u_n)$ est croissante à partir du terme d'indice 2.

## 7. Suite arithmétique

-Exercice 9-

1. $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n=-3(n+1)+1+3n-1=-3$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n$ est constant : ce qui montre que la suite $(u_n)$ est arithmétique de raison r = -3. La suite étant définie sur $\mathbb{N}$, son premier terme est $u_0=-3\times 0+1=1$.
2. $v_0=0$ ; $v_1=1$ ; $v_2=4$ $\quad v_2-v_1=3$ et $v_1-v_0=1$ : la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante : la suite $(v_n)$ n'est pas arithmétique.

-Exercice 10-

1. Pour tous les entiers naturels $n$ et $p$ : $u_n = u_p + r(n-p)$ donc

$$u_7=u_3+4r \iff -2=1+4r \iff r=\frac{-3}{4}$$

2. et $u_n=u_3+r(n-3)=1-\frac{3}{4}(n-3)=-\frac{3}{4}n+\frac{13}{4}$
3. D'où $u_0=\frac{13}{4}$ et $u_{50}=\frac{-150+13}{4}=-\frac{137}{4}$
4. $u_p$ = -11 $\iff -\frac{3}{4}p+\frac{13}{4}=-11 \iff -\frac{3}{4}p=-\frac{57}{4} \iff p=-\frac{57}{4}\times\left(-\frac{4}{3}\right)=19$

-Exercice 11-

La suite $(u_n)$ étant arithmétique, pour calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{2010}$, il suffit d'appliquer la formule permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'ue suite arithmétique :

$$S = (\text{nombre de termes})\times\frac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2} = 2011\times\frac{u_0+u_{2010}}{2}.$$

$(u_n)$ suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0$ = 334 $\iff \forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=u_0+nr=334-\frac{1}{3}n$ d'où

$$u_{2010}=334-\frac{2010}{3}=-336 \quad\text{et}\quad S = 2011\times\frac{334-336}{2}=-2011$$

-Exercice 12-

1. a) Les cinq premiers termes de la suite sont : $u_0 = 1$ ; $u_1=\frac{u_0}{2u_0+1}=\frac{1}{3}$ ; $u_2=\frac{u_1}{2u_1+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+1}=\frac{1}{5}$ ;

   $u_3=\frac{1}{7}$ et $u_4=\frac{1}{9}$

   b) Il semblerait que pour tout entier naturel $n$, $u_n=\frac{1}{2n+1}$
2. a) $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{2u_n+1}{u_n}-\frac{1}{u_n}=2$ ; ce qui montre que $(v_n)$ est arithmétique de raison 2. Son premier terme est $v_0=\frac{1}{u_0}=1$.

   b) Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=v_0+nr=1+2n$

   c) Et comme $v_n=\frac{1}{u_n} \iff u_n=\frac{1}{v_n}$ on obtient $u_n=\frac{1}{2n+1}$ ce qui avait été conjecturé.

8. Suite géométrique

-Exercice 13-

1. On a $u_n = u_0\, q^n$ d'après la propriété. Le huitième terme s'appelle $u_7$ et $u_7 = 12\times10^7 = 120\ 000\ 000$
2. $u_0$ étant positif et $q = 10 > 0$ ; pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$. On étudie le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{12\times10^{n+1}}{12\times10^n} - 1 = 10 - 1 = 9$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$ avec $u_n > 0$, on en déduit $u_{n+1} > u_n$ et la suite est strictement croissante.

3. La somme des 20 premiers termes est donnée par : $u_0 + u_1 + \ldots + u_{19} = 12 \times \frac{1-10^{20}}{1-10} = \frac{4}{3}\left(10^{20} - 1\right)$

-Exercice 14-

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 5^{n+1}$

1. $u_{n+1} = 2 \times 5^{n+2} = 2 \times 5^{n+1} \times 5$ ; d'où $u_{n+1} = 5\, u_n$.
   La suite $u$ est géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 10$.
2. $v$ est géométrique telle que $v_3 = u_0 = 10$ et $v_7 = 810$ donc $v_7 = v_3 \times q^4$ donc $q^4 = \frac{810}{10} = 81$ ; donc $q = 3$ ou $q = -3$. Or la suite $v$ est croissante donc $q > 0$.

   On en déduit que la raison $q = 3$ et $v_3 = v_0 \times 3^3$ permet d'obtenir $v_0 = \frac{10}{27}$.

-Exercice 15-

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2048}$ On peut écrire $S = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$

$S$ est la somme des 12 premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1 donc

$$S = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right) = 2 - \frac{1}{2048} \qquad S = \frac{4095}{2048}.$$

-Exercice 16-

1. $h_{n+1} = \frac{4}{5} \times h_n$ ; la suite $h$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$.
2. a) valeurs de $h_n$ :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h_n$ | 1 | 0,8 | 0,64 | 0,512 | 0,4096 | 0,3277 | 0,2621 |

   b) on cherche $n$ tel que : $h_n < 0,05$ mètres.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $h_{13} = 0,05498$ et $h_{14} = 0,04398$ ; c'est donc à partir du quatorzième rebond que la hauteur de la balle est inférieure à 0,05 mètres.